PANAMÁ 2020

OMCC

XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Ciudad de Panamá, Panamá

Día 2
28 de octubre de 2020

Problema 4

Considere un triángulo ABC con $BC > AC$. El círculo con centro en C y radio AC corta al segmento BC en D. Sea I el incentro del triángulo ABC y sea Γ el círculo que pasa por I y es tangente a la recta CA en A. La recta AB y Γ se cortan en F, con $F \neq A$. Demuestre que $BF = BD$.

Problema 5

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$. Demuestre que

$$P\left(x_1\right) + P\left(x_2\right) + \cdots + P\left(x_k\right) \geq kP(1).$$

Problema 6

Se dice que un entero positivo N es *interoceánico* si su factorización prima

$$N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

satisface que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

Encuentre todos los números interoceánicos menores que 2020.

Tiempo: Cuatro horas y media
Cada problema vale siete puntos