



PANAMÁ 2020



## XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Ciudad de Panamá, Panamá

Día 1

27 de octubre de 2020

### Problema 1

Un entero positivo de cuatro dígitos se dice *virtual* si es de la forma  $\overline{abab}$ , donde  $a$  y  $b$  son dígitos y  $a \neq 0$ . Por ejemplo 2020, 2121 y 2222 son virtuales, pero 2002 y 0202 no lo son. Encuentre todos los números virtuales de la forma  $n^2 + 1$ , para algún entero positivo  $n$ .

### Problema 2

Se tienen monedas idénticas distribuidas en varias pilas con una o más monedas en cada pila. Una operación consiste en tomar dos pilas con una cantidad total de monedas par entre ellas, y repartir sus monedas entre las dos pilas de modo que ambas terminen con la misma cantidad.

Una distribución es *nivelable* si es posible, mediante 0 o más operaciones, lograr que todas las pilas queden con el mismo número de monedas.

Determine todos los enteros positivos  $n$  tales que, para todo entero positivo  $k$ , cualquier distribución de  $nk$  monedas en  $n$  pilas es nivelable.

### Problema 3

Sea  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros. Encuentre todas las funciones  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  que satisfacen la siguiente propiedad:

Para cualesquiera enteros  $a, b$  y  $c$  con  $a + b + c = 0$ , se tiene que

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

*Tiempo: Cuatro horas y media  
Cada problema vale siete puntos*